Cadre : E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies. U est un ouvert de E.

I Définitions et premières propriétés

1) Différentielle

Définition 1. Une application $f : U \to F$ est dite différentiable au point $a \in U$ s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) - f(a) = L(h) + o(\|h\|)$$

Proposition 2. *Si f est différentiable au point $a \in U$, L est unique.*

Remarque 3. *On notera $L = Df(a)$ la différentielle de f au point a.*

Exemple 4. *Si $E = F = \mathbb{R}$, alors $Df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$.*

Proposition 5. *Si f est différentiable en $a \in U$, f est continue en a.*

Définition 6. Une application $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si elle est différentiable en tout point de U et si l'application $Df : x \mapsto Df(x)$ est continue de U dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemple 7.
(i) Si f est linéaire, alors $Df(a) = f$.
(ii) Si f est constante, alors Df est nulle sur E.
(iii) Si f est quadratique, on écrit $f(x) = B(x, x)$ où B est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$, et on a $Df(a) \cdot h = 2B(a, h)$.

Application 8. *Soient $y_1, \ldots, y_n$ les solutions du système différentiel $y'(t) = A(t)y(t)$, où $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction continue et soit $w(t) = \det(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ leur wronskien. Alors $w'(t) = \operatorname{tr}(A(t))w(t)$, et si A est constante $\det(e^{tA}) = e^{t\operatorname{tr}(A)}$.*

Proposition 9. *Si f et g sont différentiables en a, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ est différentiable avec $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$ et λf est différentiable avec $D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a)$.*

Proposition 10. *Si f est différentiable en a, et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a avec $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$.*

Définition 11. Soit V un ouvert de F. Une fonction $f : U \to V$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ si f est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et si l'application réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Application 12. *Soit V un ouvert de F et $f : U \to V$ un difféomorphisme. Alors $D(f^{-1})(f(x)) \circ Df(x) = Id_{\mathbb{R}^n}$.*

Remarque 13. *Si $f, g : U \to \mathbb{R}$ sont différentiables en $a \in U$, alors fg est différentiable avec $D(fg)(a) = Df(a)g(a) + f(a)Dg(a)$.*

2) Accroissements finis

Théorème 14 (Accroissements finis)**.** *Soient $f : U \to F$ et $a, b \in U$ tels que le segment $[a, b] \subset U$. Si f est continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$, et s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in]a, b[$, $\|Df(x)\| \leqslant M$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M \|b - a\|$.*

Corollaire 15. *Soit $f : U \to F$ différentiable sur U convexe. S'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in U$, $\|Df(x)\| \leqslant M$, alors, pour tous $a, b \in U$, $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M \|b - a\|$.*

Corollaire 16. *Si U est un ouvert connexe, et si $Df(x) = 0$ sur U, alors f est constante sur U.*

Application 17. *Soit $(f_k)_k$ un suite d'applications définies de U dans F et différentiables sur U. On suppose de plus :*
(i) $(f_k)_k$ converge simplement sur U vers $f : U \to F$.
(ii) $(D(f_k))_k$ converge uniformément sur U.
Alors f est différentiable sur U et $Df = \lim_{k \to +\infty} D(f_k)$.

Exemple 18. *Si $E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp : M \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$ est $\mathcal{C}^1$.*

3) Dérivées partielles

Définition 19. Soient $f : U \to F$ une application, $a \in U$ et $v \in E$. Si la fonction à variable réelle $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0, f est dite dérivable en a selon le vecteur v. On note alors :

$$D_v f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Proposition 20. *Si $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ alors f admet une dérivée selon tout vecteur v et on a $D_v f(a) = Df(a) \cdot v$.*

Exemple 21. *La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = y$ admet des dérivées directionnelles selon tous les vecteurs en $(0, 0)$, mais n'est pas continue.*

Définition 22. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to F$. Soient $a \in U$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$. Si, pour $i \in [\![1, n]\!]$, f est dérivable en a selon e_i, on dit que f admet une dérivée partielle en a d'indice i, et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a)$$

Théorème 23. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to F$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, f admet des dérivées partielles continues sur U.*

Exemple 24. $Inv : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1} \end{array} \right.$ *est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $D(Inv)(M) \cdot H = -M^{-1} H M^{-1}$ pour tout $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Définition 25. Si $F = \mathbb{R}$ et si $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire, il existe un unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$, appelé gradient de f en a, tel que $Df(a) \cdot h = \nabla f(a) \cdot h$.

Remarque 26. $\nabla f(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$

Définition 27. Pour $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $f = (f_1, \ldots, f_p)$, la différentielle $Df(a)$ est l'application linéaire définie, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, par la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Si $n = p$, le jacobien, noté $J(f)$, est le déterminant de la matrice jacobienne.

Théorème 28. *Soient $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, $V = \varphi(U)$ et $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :*

$$\int_V f(u)\, du = \int_V f(\varphi(u))\, |J(\varphi)(u)|\, du$$

Application 29 (Intégrale de Gauss)**.** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

II Inversion locale et fonctions implicites

1) Théorème d'inversion locale

Théorème 30 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$. On suppose que la matrice jacobienne $Df(a)$ est inversible. Il existe alors un ouvert $V \subset U$ contenant a tels que $f|_V$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ de V sur $f(V)$.*

Application 31. *Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est suffisamment proche de I_n, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = B^k$.*

Théorème 32 (Théorème d'inversion globale)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f est injective sur U et que, pour tout $x \in U$, la matrice jacobienne $Df(x)$ est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.*

Contre-exemple 33. *La fonction* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array} \right.$ *est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mais n'est pas un difféomorphisme global.*

2) Théorème des fonctions implicites

Théorème 34 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, (a, b) un point de U, et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a, b)$, formée des dérivées partielles par rapport à y, est inversible. Alors l'équation $f(x, y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y : il existe un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert W de b dans $\mathbb{R}^p$, avec $V \times W \subset U$, et une application $\varphi : V \to W$, de classe $\mathcal{C}^1$, unique, telle que :*

$$(x \in V,\, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

Exemple 35. *L'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ définit deux fonctions implicites :*

$$\varphi_1 : \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right. \quad et \quad \varphi_2 : \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow &]-\infty, 0[\\ x & \longmapsto & -\sqrt{1 - x^2} \end{array} \right.$$

III Différentielles d'ordres supérieurs

1) Différentielle seconde

Définition 36. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en tout point de U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors si $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ est différentiable en un point $a \in U$, on dit que f est deux fois différentiable en a, et on note $D^2f(a)$ la matrice hessienne de f en a définie par :

$$D^2f(a) = D(Df)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Théorème 37 (Schwarz)**.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors :*

$$\forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Exemple 38. *La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^1}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et admet des dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)$ en tout point mais distinctes à l'origine.*

2) Formule de Taylor

Définition 39. On définit la différentielle d'ordre k par récurrence : si f est k fois différentiable en $a \in U$, sa différentielle k-ième sera une application k-linéaire symétrique. On note $D^kf(a)$ la k-ième différentielle, f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si ses dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur U.

Théorème 40 (Reste intégral)**.** *Soit $f : U \to F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Si, pour $a \in U$, le segment $[a, a+h]$ est contenu dans U, alors :*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} D^i f(a)\cdot(h)^i + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt$$

Lemme 41. *Soit $A_0 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V, \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $A \in V$, on a ${}^t\rho(A)A_0\rho(A)$.*

Théorème 42 (Lemme de Morse)**.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et que $d^2f(0)$ est non dégénérée et de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)^2$ au voisinage de 0.*

3) Problèmes d'extrema

Théorème 43. *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.*

(i) Si a est un extremum local de f et si $Df(a)$ existe, alors $Df(a) = 0$.

(ii) Si a est un minimum local de f et si $D^2f(a)$ existe, alors $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est une forme quadratique positive.

(iii) Si $Df(a) = 0$ et $D^2f(a)$ est définie positive, alors f admet en a un minimum local strict.

IV Extrema liés

Définition 44. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a un extremum lié (ou relatif) en $a \in M$ s'il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f(a)$ est un extremum de f sur $M \cap U$.

Théorème 45 (Extrema liés)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $g_1, \ldots, g_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ telles que les formes linéaires $d_xg_1, \ldots, d_xg_k$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in U$. Posons :*

$$M = \{x \in U \,|\, \forall\, i \in [\![1,k]\!],\ g_i(x) = 0\}$$

Alors, si f a un extremum lié en $a \in M$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$d_a f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k \, d_a g_i$$

Ces réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Développements

- Lemme de Morse (41,42) [Rou15]
- Extrema liés (45) [Ave83]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses

[Rou15] F. Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini

[Ave83] A. Avez. *Calcul différentiel.* Masson

Annexes

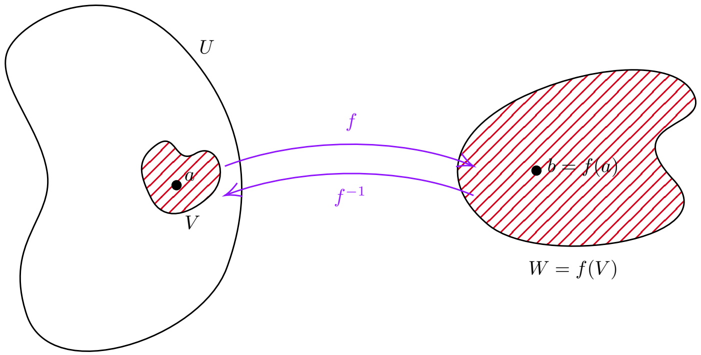

FIGURE 1 – Théorème d'inversion locale

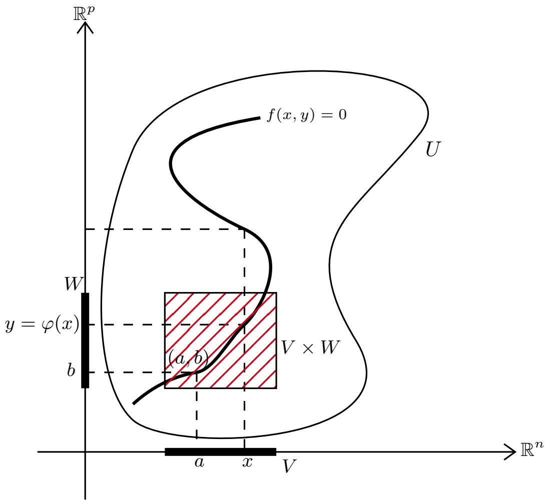

FIGURE 2 – Théorème des fonctions implicites